TITLE:

プラズマ非線形ドリフト波方程式におけるシア流を伴う局在渦解の構成(流体中の非線形波動の数理的側面)

AUTHOR(S):

森口, 博文; 野崎, 一洋

CITATION:

森口, 博文 ...[et al]. プラズマ非線形ドリフト波方程式におけるシア流を伴う局在渦解の構成(流体中の非線形波動の数理的側面). 数理解析研究所講究録 1992, 782: 38-49

ISSUE DATE:

1992-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/82535

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 782 巻 1992 年 38-49

プラズマ非線形ドリフト波方程式における
シア流を伴う局在渦解の構成

名大理　森口博文*(Hirofumi Moriguchi)
名大理　野崎一洋 (Kazuhiro　Nozaki)

0. はじめに

議論の対象とする空間 2 次元の非線形発展方程式には，厳密な双極型孤立渦解がある．まず方程式に関して導出を含む説明をし，解とその非線形波としての特徴を述べる．次にこの区分的に連続な孤立渦解の構成が簡単な 4 段階に分けて行なえる事を見る．そして，シア流を伴う局在渦解では，シア流の回りの式展開とその係数に現われる特異点の除去の 2 段階を追加することにより，同様に構成できる事を示し，区分的連続解の具体的表示と滑らかな単極型孤立渦解の議論を与える [1]．

プラズマ物理における非線形ドリフト波は，簡単な場合では，一様磁場$\boldsymbol{B} = B\hat{z}$ (z 方向) に垂直な 2 次元平面内を，密度勾配 $\nabla n_0(x)$ 方向 (x 方向) に垂直 (y 方向) に伝播するものとして記述される。その速度$\boldsymbol{v}$ は，電場 $\boldsymbol{E} = \nabla\psi$ (ψ : 静電ポテンシャル) による力と磁場によるローレンツ力 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ の釣り合って生じる$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト速度程度の大きさである．また，回転球面上，特に惑星大気ではローレンツ力と同形の力であるコリオリ力 $\boldsymbol{v}\times f\hat{z}$ (f : コリオリ・パラメータ) が働くので，同種類の波が生じる．これを地球科学などの分野では非線形ロスビー波という．

上記の波を記述する最も簡単な方程式は，2 + 1 次元で，プラズマ物理では Hasegawa-Mima (HM) 方程式 [2, 3]，地球科学では Charney 方程式 [4] と呼ばれる．

$$(\partial/\partial t)(\nabla^2\psi - \psi) + v_{\mathrm{d}}(x)\partial\psi/\partial y + [\psi, \nabla^2\psi] = 0. \tag{1}$$

無次元化した量で書いた．ψ は速度ポテンシャルとも考えられ，$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$ の 2 次元 Laplace 演算子 ($\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は 2 次元の勾配 gradient である) を施して，$\nabla^2\psi$ は渦度であり，渦度の発展方程式である．線形項は密度の非一様性により生じ，その係数は反磁性ドリフト速度 $v_{\mathrm{d}}(x) = -(\ln n_0(x))'$ を表わす．非線形項 $[\psi, a] = (\partial\psi/\partial x)(\partial a/\partial y) - (\partial a/\partial x)(\partial\psi/\partial y)$, は，Poisson 括弧演算子で，(注 1) $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト速度による流体方程式の対流微分項より生じる: $(\hat{z}\times\nabla\psi)\cdot\nabla a = [\psi, a]$. (注 2) 反対称であるので，$[\psi, \psi] = 0$ であり，さらに任意関数を使用して，$a = F(\psi)$ ならば，$[\psi, a] = 0$ を満足することは，$F'(\psi)[\psi, \psi] = 0$ より分かる．(注 3) 係数が定数または x だけの関数である y に関する偏微分項は，$w'(x)\partial b/\partial y = [w(x), b]$ と表わせるから，一般化された渦度 $q = \nabla^2\psi - \psi - \ln n_0(x)$ を定義して，HM 方程式は，

$$\partial q/\partial t + [\psi, q] = 0, \tag{2}$$

と書き直すことができる．

---

*岐阜高専応用数学

物理的な系からの方程式の導出に関し簡単に触れておく．プラズマの流体近似の場合で，圧力なしの低温（$T_\mathrm{i} \ll T_\mathrm{e}$）イオンの運動方程式とイオンの連続の式

$$(\partial/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = \nabla\psi + \boldsymbol{v}\times\hat{z}, \qquad \partial n/\partial t + \nabla(n\boldsymbol{v}) = 0, \tag{3}$$

から始める．この方程式で，慣性効果を無視する第1次の近似では，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト速度 $\boldsymbol{v}_1 = \nabla\psi\times\hat{z}$ が得られる．渦度の方程式にする為に，$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = (1/2)\nabla\boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$ に注意して，両辺の回転演算を施し，z 成分（$\hat{z}\cdot\mathrm{rot} = \hat{z}\cdot\nabla\times$）をとる．2次元の速度の場合，$\Omega = \hat{z}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}$（又は，$\nabla\times\boldsymbol{v} = \Omega\hat{z}$）を定義して，$(\partial/\partial t)(1+\Omega) + \nabla((1+\Omega)\boldsymbol{v}) = 0$,（$\Omega$ は渦度で，1 はイオンのサイクロトロン周波数のオーダを表わし）Ω に関する方程式を得る．これは（イオン）密度の連続の式と同形で，両式から圧縮性の項 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ を消去すると，

$$(\partial/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,(\ln(1+\Omega) - \ln n) = 0, \tag{4}$$

が得られる（この式を導く際に，圧縮性に注意を要する．摂動展開による合理化はできる）．この式に現れる速度 $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}_1 = \hat{z}\times\nabla\psi$, $|\psi| \ll 1$, で近似し，準中性 $n = n_\mathrm{i} \simeq n_\mathrm{e}$ とし，（電子）密度に Boltzmann 分布 $n = n_0(x)\exp(\psi)$ を仮定すると，HM 方程式を導出できる．

また，惑星大気の運動もよく似た議論が同様にできる [5]．大気の厚みを，平均とそれからの変位, $H = 1+\psi$, $|\psi| \ll 1$, で表わすと，水平面での大気の流れの速度 $\boldsymbol{v}$ は運動方程式に従い [6]，H は大気の密度に相当するので，連続の式に従う．

$$(\partial/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = -g\nabla\psi + f\boldsymbol{v}\times\hat{z}, \qquad \partial H/\partial t + \nabla(H\boldsymbol{v}) = 0, \tag{5}$$

g は重力定数である．コリオリ・パラメータ f の平均値 $<f>$ を考慮して，無次元化すると，運動の方程式の第1次の近似として，$\boldsymbol{v}_1 = \nabla\psi\times\hat{z}$ を得る．同様の手続きで，渦度の方程式にして，連続の式を用いると，

$$(\partial/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,(\ln(f+\Omega) - \ln(1+\psi)) = 0, \tag{6}$$

になり，同様に $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}_1$ に置き換え，$|\psi| \ll 1$ と，$<f>$ による無次元化に注意すると，Charney 方程式 (HM 方程式) を得る．

以上のような物理的に意味のある系から導出された方程式の，各々の場合の孤立波解は，例えば，プラズマ物理での乱流状態中に生成され共存するコヒーレント構造に対応し，エネルギー輸送計算の際に [7]，あるいは，地球科学の分野での木星大気の大赤班 (Great Red Spot) の模型 [8, 9, 10] として，適用できる可能性がある．

この方程式の，Larichev と Reznik により得られた双極型（ダイポール dipole）孤立渦解（モードン modon と呼ばれる）[11] は，

$$\psi = \begin{cases} A_1K_1(\beta r/r_0)\cos\theta, & \text{for } r \ge r_0, \\ (B_1J_1(\beta r/r_0) + Cr)\cos\theta, & \text{for } r \le r_0, \end{cases} \tag{7}$$

$$A_1 = r_0u/K_1(\beta),\;\; B_1 = -(\beta^2/\gamma^2)(r_0u/J_1(\gamma)),\;\; C = \left(1+\beta^2/\gamma^2\right)u,$$

と書かれ，K_1 は変形 Bessel 関数で，J_1 は Bessel 関数であり，β と γ の値は，分散関係 $\dfrac{K_2(\beta)}{\beta K_1(\beta)} = -\dfrac{J_2(\gamma)}{\gamma J_1(\gamma)}$, を満たすように採らなくてはならない．なお，$\beta^2/\gamma^2 \equiv 1-(v_\mathrm{d}/u)$ で，(β,γ) のとり得る値は無限個ある．それは，次の極限でも分かる．

$\beta \to 0$ ($u \to v_\mathrm{d}$: Euler 流体極限) の時, $\quad J_1(\gamma) = 0,\ \gamma = \gamma_n,\ n = 1, 2, \cdots,$
$\beta \to \infty$ ($u \to 0$: 完全遮蔽極限) の時, $\quad J_2(\gamma) = 0,\ \gamma = \gamma_n,\ n = 1, 2, \cdots.$

非線形波としての解の特徴を見る [12]．遠方で指数的に減衰すること

$$K_\nu\left(\frac{\beta r}{r_0}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi r_0}{2\beta r}} \mathrm{e}^{-(\beta r/r_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta r}{r_0}\right)^n \frac{\Gamma\left(\nu + n + \frac{1}{2}\right)}{n!\Gamma\left(\nu - n + \frac{1}{2}\right)}, \qquad \frac{\beta^2}{\gamma^2} \equiv 1 - \frac{v_\mathrm{d}}{u} > 0,$$

より，この非線形波の伝播速度 u は, $\left\{ \begin{array}{l} u > v_\mathrm{d}, \\ u < 0, \end{array} \right.$ となり，この線形波の速度の大きさ $0 < v_\mathrm{d}/(1 + \boldsymbol{k}^2) < v_\mathrm{d}$, に相補的な関係になる．$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルである．線形波とは逆向きに伝播することがあるわけである．

物理的なパラメータ量が相互に関係することを，それらの関係は一意的では無いので，先程の極限で見る [12]．最大振幅 $\psi(r_\mathrm{P})$ は，

$$\psi(r_\mathrm{P}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1.28 r_\mathrm{P} u, & \beta \to 0, \\ 0.07 r_\mathrm{P}^3 (u - v_\mathrm{d}), & \beta \to \infty, \end{array} \right. \qquad r_\mathrm{P} = \left\{ \begin{array}{ll} 0.55 r_0, & \beta \to 0, \\ 0.32 r_0, & \beta \to \infty, \end{array} \right.$$

となり，ここで r_P は最大値の位置である．

数値的に，正面衝突や追い越しの場合に，弾性的である可能性も報告されている [13]．これに否定的な結果 [14] もあるが，大まかな形は保たれる程，安定と思われる．

区分的に接続して作った解であるので，接線の位置 $r = r_0$ の所で，高階微分 (この場合，3 階) が不連続になっているのも特徴である．

また，接続条件を吟味すると，2 階微分が境界円で不連続になるが，任意振幅の円状に対称な解を双極渦解に加えたものでもよく，“rider” 解 [15] と呼ばれる解が得られる．

$$\psi = \left\{ \begin{array}{ll} A_0 K_0(\kappa r) + A_1 K_1(\kappa r) \cos\theta, & \text{for } r \geq r_0, \\ B_0 J_0(\rho r) + \Gamma + (B_1 J_1(\rho) + C r) \cos\theta, & \text{for } r \leq r_0, \end{array} \right. \tag{8}$$

$$A_0 = \frac{\rho J_1(\rho r_0) \Gamma}{\rho J_1(\rho r_0) K_0(\kappa r_0) - \kappa K_1(\kappa r_0) J_0(\rho r_0)}, \qquad B_0 = A_0 \frac{\kappa K_1(\rho r_0)}{\rho J_1(\rho r_0)},$$

A_1, B_1, C と分散関係は前述の同じである．また，2 階微分の $r = r_0$ でのとびの値 $[\nabla^2\psi]|_{r=r_0}$ は，次のように計算できる．

$$[\nabla^2\psi]|_{r=r_0} = \frac{\kappa K_0(\kappa r_0) J_1(\rho r_0) + \rho J_0(\rho r_0) K_1(\kappa r_0)}{\rho J_1(\rho r_0) K_0(\kappa r_0) - \kappa K_1(\kappa r_0) J_0(\rho r_0)} \rho\kappa\Gamma.$$

定常伝播する (y 方向に定数 u の速さ) 場合は，次の任意関数を含む 2 階偏微分方程式になる．$\partial a/\partial t = -u \partial a/\partial y = [-ux, a]$, であるから，方程式は，$[\psi - ux, q] = 0$, になり，任意関数 $F(\xi)$ を用いて，$q = F(\psi - ux)$, つまり $\nabla^2\psi = \psi + \ln n_0(x) + F(\psi - ux)$, 又は任意関数 $G(\xi) \equiv -\xi + F(\xi)$, を用いて，$\nabla^2\psi = ux + \ln n_0(x) + G(\psi - ux)$, であるので，以下にこれらの方程式から考えることにする．

1. 解の構成方法 I. 双極型孤立渦

Larichev–Reznik (LR) (1976) により得られた双極型渦解 [11] の構成方法を 4 つの段階に分けて簡単に述べる。

1(i) 孤立渦解は遠方で減衰すると表現されるので，これを無限遠での境界条件として課してやると任意関数 F は決まる．境界条件

$$\psi \to 0 \ \text{as} \ r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty, \tag{9}$$

を方程式に代入すると，$F(\xi) = -\ln n_0(-\xi/u) = -v_{d1}/u$, になる．後者の等号は，普通の HM 方程式では反磁性速度が定数であり，$-\ln n_0(x) = v_{d1}x$ となるので成立する．

1(ii) この F を用いて，方程式を書き直すと，その解は変形 Bessel 関数で表現される．

$$\nabla^2\psi = (1 - v_{d1}/u)\,\psi, \qquad \kappa^2 \equiv 1 - v_{d1}/u > 0, \tag{10}$$

になり，後者は減衰する解で満たす必要がある．極座標 (r, θ) を用いると，変数分離が可能で，解は，$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_n(\kappa r) \cos n\theta$, となる．$A_n$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ と κ は未知定数であり，$K_n(\kappa r)$ は変形 Bessel 関数である．基本モードとして，

$$\psi = A_1 K_1(\kappa r) \cos\theta, \tag{11}$$

を解とする．未知定数は，A_1, κ, (つまり，u) の 2 個である．

1(iii) 原点 $r = 0$ では，発散するので，原点を中心とする半径 $r = r_0$ の円を境界線として置き，その内側で有限となる解を考える．実際には，簡単の為，振動型になる線形関数 $F(\xi) = -(1 + \rho^2)\xi$, を採用する．方程式は，

$$\nabla^2\psi = -\rho^2\psi + (\kappa^2 + \rho^2)ux, \tag{12}$$

となり，極座標で変数分離可能で，内側解は，$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J(\rho r) \cos n\theta + (1 + \kappa^2/\rho^2)\, ux$, と Bessel 関数 J_n で表現される．ここで，B_n, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ と ρ は未知定数であり，$J_n(\rho r)$ は Bessel 関数である．基本モードとして，

$$\psi = B_1 J_1(\rho r) \cos\theta + \left(1 + \kappa^2/\rho^2\right) ur \cos\theta, \tag{13}$$

を解とする．未知定数は，B_1, ρ, r_0 の 3 個である．

1(iv) 外側解と内側解が得られたので，方程式との整合性と念頭において，接続条件を課し，接合する．具体的には，未知係数を決定したり，それらの間の関係式を求める．

条件 (a). 境界円上での解 (ポテンシャル) と，その微分 (速度成分) が連続である．

条件 (b). 境界円が流線に一致する．

(a) $\psi|_{r=r_0+0} = \psi|_{r=r_0-0}, \qquad \nabla\psi|_{r=r_0+0} = \nabla\psi|_{r=r_0-0},$

(b) $\psi - ux|_{r=r_0+0} = \psi - ux|_{r=r_0-0} = \phi_c(=$ 定数$)$.

式で書いた，この接続条件は，今の場合，3 つの条件式になる．5 つの未知定数 A_1, B_1, κ, ρ, r_0 のうち，A_1, B_1 が具体的に表示され，残りの 1 つは分散関係式になる．こうして，前述の双極型渦解は求まった．(ただし，$\beta = \kappa r_0$, $\gamma = \rho r_0$ である．)

2. 解の構成方法 II. シア流を伴う局在渦

2(i) 局在渦にシア流を伴う場合に，解の形は局在渦部$\varphi=\varphi(x,y)$ とシア流部 $\psi_0(x)$ の和 $\psi=\psi_0(x)+\varphi$ で表わされる [9]．無限遠での境界条件として，遠方にシア流 [16] のみがあり，

$$\psi \to \psi_0(x) \;\; \text{as} \;\; r=\sqrt{x^2+y^2} \to \infty, \tag{14}$$

とする．これを方程式に代入すると，任意関数 G がシア流によって決まることが分かる．

$$\psi_0''(x) = ux + \ln n_0(x) + G(\psi_0(x)-ux). \tag{15}$$

この関数形を，G の引数 $\xi=\psi_0(x)-ux$ を x について解いて得られる関数 $x=X_0(\xi)$ を用いて，示すことができる．下付き添字 0 は，$\psi_0(x)$ の形に依っていることを表わす．

$$G(\xi) = -uX_0(\xi) - \ln n_0(X_0(\xi)) + \psi_0''(X_0(\xi)). \tag{16}$$

2(ii) 無限遠を含む (外側) 領域での局在渦の方程式が，シア流に依存する．定数速度 u で y 方向に移動する座標系でのシア流の流れ関数を$\phi_0(x)\equiv\psi_0(x)-ux$ で書くと，

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= G(\phi_0(x)+\varphi) - G(\phi_0(x)) \\ &= -u(X_0(\phi_0(x)+\varphi)-x) - \ln\left(n_0(X_0(\phi_0(x)+\varphi))/n_0(x)\right) \\ &\qquad + \psi_0''(X_0(\phi_0(x)+\varphi)) - \psi_0''(x).\end{aligned} \tag{17}$$

シア流の形を具体的に与えずに，あるいは制限せずに，考えてきた．物理的には，2 つの速度が存在し，シア流速度の形によっては，局在渦の速度場との「共鳴」などで渦崩壊などに至る場合が取り除かれず含まれることを意味する．

この方程式を展開による手法で取扱うことは有用である．まず,「共鳴」とみなされる，シア流の速度と局在渦の伝播速度との差による特異点が現れる．そして，この特異点を除去する条件を課すと，シア流を決める方程式が得られ，局在渦に関する方程式には特異点がなくなり，かつ有限項で切断される．

シア流 $\phi_0(x)$ の回り ($\psi=\psi_0(x)$ 又は $\varphi=0$) で，方程式を形式 Tayler 展開する．

$$\nabla^2\varphi = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(x)}{k!}\varphi^k, \qquad a_k(x)=\frac{a_{k-1}'(x)}{\psi_0'(x)-u}, \quad a_1(x)=\frac{\psi_0'''(x)-u-n_0'(x)/n_0(x)}{\psi_0'(x)-u}. \tag{18}$$

係数 $a_k(x)$ は，$x=X_0(\phi_0(x))$ に注意し，$\psi_0(X_0(\xi))-X_0(\xi)=\xi$ を陰関数的に微分して順に求めていくことができる．係数はこのようにシア流 $\psi_0(x)$ と，その他に方程式に含まれる量 u, $n_0(x)$ とで書かれ，すべての係数には速度場空間で同じ位置に特異点を持つ．

2(iii) 特異点除去条件の，最も簡単なものとして，特異点を持つある m 番目の係数を 0 にすることを課す．その係数は未定のシア流で書かれているので，その条件はシア流に関する常微分方程式を与え，$\psi_0(x)$ を決める．他の係数もこれを使って決まる．

$$a_l(x) = \sum_{n=0}^{m-l-1}\frac{c_{m-l-n}}{n!}\phi_0(x)^n, \qquad \text{for } 1\le l\le m-1, \text{ (低次項の係数)}, \tag{19}$$

$$a_l(x)=0, \qquad \text{for } l\geq m-1, \ (\text{高次項の係数}). \tag{20}$$

方程式には，特異点がなくなり，かつ有限項で切断される．
[a1] 具体的に，低次項からこの条件を課していくと，$a_1(x)=0$ の場合には，シア流に関する常微分方程式と局所渦に関する方程式の 2 つに分離される．

$$\psi_0'''(x)=u+n_0'(x)/n_0(x), \qquad \nabla^2\varphi=0. \tag{21}$$

シア流の解は，$\psi_0(x)=\dfrac{ux^3}{6}+\dfrac{v_{\rm E2}}{2}x^2+v_{\rm E1}x+v_{\rm E0}+\int^x dx_1\int^{x_1}dx_2\ln n_0(x_2)$，となり，局所渦の方程式に特異点のないシア流の一つである．$v_{\rm E2}$, $v_{\rm E1}$, $v_{\rm E0}$ は適当な積分定数である．
[a2] $a_2(x)=0$ の場合，同様に

$$\psi_0'''(x)+c_1\psi_0'(x)=(1+c_1)u+n_0'(x)/n_0(x), \qquad \nabla^2\varphi=c_1\varphi, \tag{22}$$

そして，
$$\psi_0(x)=b_1\cos\sqrt{c_1}(x-x_0)+b_2\sin\sqrt{c_1}(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2\frac{\sin\sqrt{c_1}(x_1-x_2)}{\sqrt{c_1}}\left((1+c_1)u+\frac{n_0'(x_2)}{n_0(x_2)}\right),$$
ここで $c_1>0$, b_1, b_2, x_0 は積分定数である．
[a3] $a_3(x)=0$ の場合は，

$$\phi_0'''(x)-c_1\phi_0(x)\phi_0'(x)-c_2\phi_0'(x)=u+n_0'(x)/n_0(x), \tag{23}$$

$$\nabla^2\varphi=(c_1\phi_0(x)+c_2)\varphi+(c_1/2)\varphi^2. \tag{24}$$

c_1, c_2 は積分定数であり，シア流に関して定常伝播での外力のある Korteweg–de Vries(KdV) 方程式になり，局在渦は後述の条件で全領域で滑らかかつ発散のない有限な解が期待できる．
2(iv) 実際に解を求める．特異点を除去するのに，線形波速度に関係する反磁性速度の位置による変化を許し，それを多項式型とする．$v_{\rm dm}$, $(m=1,2,3,\cdots,M)$ は定数である．

$$v_{\rm d}(x)=-(\ln n_0(x))'=\sum_{m=1}^{M}v_{\rm dm}x^{m-1}. \tag{25}$$

2(iv[a1]) $a_1(x)=0$ の場合，局在渦は Laplace 方程式に従い，遠方でべき的に減衰する解で表現される．シア流の解を加えて，解は，

$$\begin{aligned}\psi &= -\sum_{m=1}^{M}\frac{(m-1)!}{(m+2)!}v_{\rm dm}x^{m+2}+\frac{u}{6}x^3+\frac{v_{\rm E2}}{2}x^2+v_{\rm E1}x \\ &\quad +v_{\rm E0}+\beta_0\ln\frac{r}{r_0}+\sum_{m=1}^{M+2}\frac{\beta_m\cos m\theta}{r^m}, \quad \text{for } r\geq r_0,\end{aligned} \tag{26}$$

となる．未知定数は β_m $(m=1,2,\cdots,M+2)$, $v_{\rm E0}$, $v_{\rm E1}$, $v_{\rm E2}$, u の計 $M+6$ 個である．
2(iv[a2]) $a_2(x)=0$ の場合は，局在渦の方程式は変形 Bessel 関数の解を持ち，遠方では指数的に減衰する．解は，

$$\begin{aligned}\psi &= A_{-2}\cos\kappa x+A_{-1}\sin\kappa x+\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=0}^{[(m-1)/2]}(-1)^l\frac{(m-1)!}{(m-2l)!}\frac{v_{\rm dm}}{\kappa^{2(l+1)}}x^{m-2l} \\ &\quad +\left(u-\frac{u}{\kappa^2}\right)x+A_{-3}+\sum_{m=0}^{M}A_mK_m(\kappa r)\cos m\theta, \quad \text{for } r\geq r_0,\end{aligned} \tag{27}$$

となる．未知定数は A_m $(m=-3,-2,-1,0,1,\cdots,M)$, u の計 $M+5$ 個である．記号 $[a]$ は a の整数部分を表わす (Gauss の記号)．

2(v) 2つの場合 ($a_1(x)=0$, $a_2(x)=0$) はいずれも原点で発散し有限ではないので，原点の回りを境界線で区分した領域で，別の任意関数 G を選択し，有限な内側解を得て，後で外側解と接続条件で接合する．いずれの場合も簡単の為，境界線を原点中心の半径 $r=r_0$ の円とし，振動型になる線形関数を選択する，$G(\xi)=-\rho^2\xi+\gamma$. 内側の方程式は

$$\nabla^2\psi=-\rho^2\psi+(1+\rho^2)ux+\ln n_0(x)+\gamma, \tag{28}$$

になる．ここで，ρ, γ は定数である．その解は，

$$\begin{aligned}\psi &= B_{-2}\cos\rho x+B_{-1}\sin\rho x+\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=0}^{[m/2]}(-1)^{l+1}\frac{(m-1)!}{(m-2l)!}\frac{v_{\mathrm{d}m}}{\rho^{2(l+1)}}x^{m-2l}\\ &\quad+\left(u+\frac{u}{\rho^2}\right)x+\frac{\gamma}{\rho^2}+\sum_{m=0}^{\infty}B_mJ_m(\rho r)\cos m\theta, \quad \text{for } r\le r_0,\end{aligned} \tag{29}$$

である．未知定数は B_m $(m=-2,-1,0,1,\cdots)$, ρ,γ,r_0 であるが，異なる引数を持つ独立な余弦関数の係数毎にそれぞれ条件を課すので，$a_1(x)=0$ の場合，$m=-2,-1,0,1,\cdots,M+2$ で計 $M+8$ 個，$a_2(x)=0$ の場合，$m=-2,-1,0,1,\cdots,M$ で計 $M+6$ 個になる．

2(vi) 外側解と内側解との接続条件は，前掲の条件式 (a) (b) を使用すればよい．角度 θ 依存性は余弦関数であるから，(a) の第2式 $(\partial\psi/\partial\theta)|_{r=r_0+0}=(\partial\psi/\partial\theta)|_{r=r_0-0}$ と，(a) の第1式と，(b) が同じになることに注意して，条件式を数えると，$a_1(x)=0$ では，$3M+9=3(M+3)$ 個になり，$a_2(x)=0$ では，$3M+3=3(M+1)$ 個になる．

未知定数として，ϕ_c を加え，容易に 0 と分かる A_{-2}, A_{-1}, B_{-2}, B_{-1} を除き，まとめると，条件式の数と未知定数の数は，それぞれ，$3M+9$, $2M+13$ ($a_1(x)=0$ の場合), $3M+3$, $2M+8$ ($a_2(x)=0$ の場合), となる．

条件式と未知定数の数が一致する場合には，すべての未知定数が一意的に決まる可能性がある．また，条件式より未知定数の数が多い場合は，決まらない定数が残るか，定数間の関係式 (分散関係) が現れる．条件式間に両立しないものや，全く同じものになることもあり，一概には言えないが，これらの場合に解が求まると考えられ，目安としてそれを書くと，$a_1(x)=0$ では，$3M+9\le 2M+13$, すなわち，$1\le M\le 4$, となり，$a_2(x)=0$ では，$3M+3\le 2M+8$ すなわち，$1\le M\le 5$, となる．また，A_m, B_m, β_m などを具体的に表わしたと考え，残りの未知定数は関係式などで表わせばよいとすると，分散関係の数の目安を与える．$a_1(x)=0$ では，$M+4=3M+9-(2M+5)$ で，$a_2(x)=0$ では，$M+1=3M+3-(2M+2)$ である．M が1ずつ大きくなると，分散関係が1ずつ増える．このように反磁性速度の位置依存性を M 次までの多項式型に拡張すると，$1\le M\le 4,5$ 程度の範囲で解が得られる可能性があることが見てとれる．互いに両立しない条件式や分散関係の為に，解がない場合もある．

2(vi[a1]M1) 遠方でべき的に減衰する場合 ($a_1(x)=0$) で，M を1から順に求める．$M=1$, つまり，$v_\mathrm{d}(x)=v_{\mathrm{d}1}$(=定数) の普通の HM 方程式では，$u\neq v_{\mathrm{d}1}$ で，解 $\psi-ux=$

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{\rho^2}+\beta_0\ln\dfrac{r}{r_0}+\dfrac{u-v_{\rm d1}}{8}\left(r^3-r_0^2r\right)\cos\theta+\dfrac{u-v_{\rm d1}}{24}\left(r^3-\dfrac{r_0^6}{r^3}\right)\cos3\theta, & \text{for } r\geq r_0, \\ \dfrac{\gamma}{\rho^2}+\dfrac{u-v_{\rm d1}}{\rho^2}\left(r-r_0\dfrac{J_1(\rho r)}{J_1(\rho r_0)}\right)\cos\theta-\dfrac{(u-v_{\rm d1})r_0^3}{4\rho r_0 J_2(\rho r_0)}J_3(\rho r)\cos3\theta, & \text{for } r\leq r_0, \end{cases} \tag{30}$$

分散関係 $J_3(\rho r_0)=0,\quad \gamma r_0^2=\beta_0\left(2-\frac{(\rho r_0)^2}{4}\right)$，となる．$u=v_{\rm d1}$, $v_{\rm E2}\neq 0$ で，解 $\psi-ux=$

$$\begin{cases} \phi_c+\dfrac{v_{\rm E2}}{4}\left(r^2-r_0^2\right)+\dfrac{v_{\rm E2}}{4}\left(r^2-\dfrac{r_0^4}{r^2}\right)\cos2\theta, & \text{for } r\geq r_0, \\ \phi_c+\dfrac{\gamma}{\rho^2}\left(1-\dfrac{J_0(\rho r)}{J_0(\rho r_0)}\right)-\dfrac{v_{\rm E2}r_0^2}{\rho r_0 J_1(\rho r_0)}J_2(\rho r)\cos2\theta, & \text{for } r\leq r_0, \end{cases} \tag{31}$$

分散関係 $J_2(\rho r_0)=0$, となる．$u=v_{\rm d1}$, $v_{\rm E2}=0$, $v_{\rm E1}\neq v_{\rm d1}$ では，解 $\psi-ux=$

$$\begin{cases} \phi_c+(v_{\rm E1}-v_{\rm d1})\left(r-\dfrac{r_0^2}{r}\right)\cos\theta, & \text{for } r\geq r_0, \\ \dfrac{\gamma}{\rho^2}+\left(-\dfrac{\gamma}{\rho^2}+\phi_c\right)\dfrac{J_0(\rho r)}{J_0(\rho r_0)}+2\dfrac{(v_{\rm E1}-v_{\rm d1})r_0}{\rho r_0 J_0(\rho r_0)}J_1(\rho r)\cos\theta, & \text{for } r\leq r_0, \end{cases} \tag{32}$$

分散関係 $J_1(\rho r_0)=0$, となる．これらの場合の解は，論文 [17] で得られ，図示してある．

2(vi[a1]M2) $M=2$, つまり，$v_{\rm d}(x)=v_{\rm d2}x+v_{\rm d1}$, $(v_{\rm d2}\neq 0)$, 線形 (軸反対称) な反磁性速度の場合．$u=v_{\rm d1}=v_{\rm E1}$ で，解 $\psi-ux=$

$$\begin{cases} \phi_c+\beta_0\ln\dfrac{r}{r_0}+\dfrac{v_{\rm d2}r_0^4}{16}\left(-\dfrac{r^4}{4r_0^4}+\dfrac{r^2}{3r_0^2}-\dfrac{1}{12}\right)+\dfrac{v_{\rm d2}r_0^4}{48}\left(-\dfrac{r^4}{4r_0^4}+\dfrac{r^2}{r_0^2}\right)\cos2\theta \\ \qquad +\dfrac{v_{\rm d2}r_0^4}{192}\left(-\dfrac{r^4}{4r_0^4}+\dfrac{r_0^4}{r^4}\right)\cos4\theta, \quad \text{for } r\geq r_0, \\ \phi_c+\dfrac{v_{\rm d2}}{4\rho^2}(r_0^2-r^2)+B_0\left(J_0(\rho r)-J_0(\rho r_0)\right)+\dfrac{v_{\rm d2}}{4\rho^2}\left(-r^2+r_0^2\dfrac{J_2(\rho r)}{J_2(\rho r_0)}\right)\cos2\theta \\ \qquad +\dfrac{v_{\rm d2}r_0^4}{\rho r_0 J_3(\rho r_0)}J_4(\rho r)\cos4\theta, \quad \text{for } r\leq r_0, \end{cases} \tag{33}$$

分散関係　$J_4(\rho r_0)=0,\quad \beta_0+B_0\rho r_0J_1(\rho r_0)=v_{\rm d2}r_0^4\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{2\rho^2r_0^2}\right)$，となる．

2(vi[a1]M3) $M=3$ では，反磁性速度が軸対称な形に限られた場合 $v_{\rm d}(x)=v_{\rm d3}x^2+v_{\rm d1}$, $(v_{\rm d3}\neq 0)$, にのみ解を持つ．解 $\psi-ux=$

$$\begin{cases} \phi_c+\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{96}\left(-\dfrac{r^5}{r_0^5}+\dfrac{3r^3}{2r_0^3}-\dfrac{r}{2r_0}\right)\cos\theta+\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{192}\left(-\dfrac{r^5}{r_0^5}+\dfrac{r^3}{r_0^3}\right)\cos3\theta \\ \qquad +\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{960}\left(-\dfrac{r^5}{r_0^5}+\dfrac{r_0^5}{r^5}\right)\cos5\theta, \quad \text{for } r\geq r_0, \\ \phi_c+\dfrac{2v_{\rm d3}r_0^5}{\rho^4r_0^4}\left(\dfrac{r}{r_0}-\dfrac{J_1(\rho r)}{J_1(\rho r_0)}\right)\cos\theta+\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{4\rho^2r_0^2}\left(-\dfrac{r^3}{r_0^3}+\dfrac{r}{2r_0}+\dfrac{J_1(\rho r)}{2J_1(\rho r_0)}\right)\cos\theta \\ \qquad +\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{12\rho^2r_0^2}\left(-\dfrac{r^3}{r_0^3}+\dfrac{J_3(\rho r)}{J_3(\rho r_0)}\right)\cos3\theta+\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{96\rho r_0}\dfrac{J_5(\rho r)}{J_6(\rho r_0)}\cos5\theta \quad \text{for } r\leq r_0, \end{cases} \tag{34}$$

$$u=v_{\rm d1}+v_{\rm d3}r_0^2/8,\quad v_{\rm E1}=v_{\rm d1}+(v_{\rm d3}r_0^2/8)\left(1-r_0^2/24\right), \tag{35}$$

分散関係 $J_5(\rho r_0)=0$, である．
2(vi[a1]M4) $M=4$ では，$v_{\mathrm{d}}(x)=v_{\mathrm{d4}}x^3+v_{\mathrm{d2}}x+v_{\mathrm{d1}}$，$v_{\mathrm{d4}}\neq 0, v_{\mathrm{d2}}v_{\mathrm{d4}}<0$, と方程式の反磁性速度はさらに制限され，次の解を持つ．$u=v_{\mathrm{d1}}=v_{\mathrm{E1}}$，で， 解 $\psi-ux=$

$$\begin{cases} \phi_c+\dfrac{v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{384}\left(-\dfrac{r^6}{r_0^6}+\dfrac{9r^4}{5r_0^4}-\dfrac{9r^2}{10r_0^2}+\dfrac{1}{10}\right)+\dfrac{v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{256}\left(-\dfrac{r^6}{r_0^6}+\dfrac{8r^4}{5r_0^4}-\dfrac{3r^2}{5r_0^2}\right)\cos 2\theta \\ \quad +\dfrac{v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{640}\left(-\dfrac{r^6}{r_0^6}+\dfrac{r^4}{r_0^4}\right)\cos 4\theta+\dfrac{v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{3840}\left(-\dfrac{r^6}{r_0^6}+\dfrac{r_0^6}{r^6}\right)\cos 6\theta, \quad \text{for } r\geq r_0, \\ \phi_c+\dfrac{3v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{2\rho^4r_0^4}\left(\dfrac{r^2}{r_0^2}-1\right)+\dfrac{3v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{32\rho^2r_0^2}\left(-\dfrac{r^4}{r_0^4}+\dfrac{4r^2}{5r_0^2}+\dfrac{1}{5}\right) \\ \quad +\dfrac{v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{\rho r_0}\left(\dfrac{3}{\rho^4r_0^4}-\dfrac{9}{40\rho^2r_0^2}+\dfrac{1}{640}\right)\dfrac{J_0(\rho r)-J_0(\rho r_0)}{J_1(\rho r_0)} \\ \quad +\dfrac{3v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{2\rho^4r_0^4}\left(\dfrac{r}{r_0}-\dfrac{J_2(\rho r)}{J_2(\rho r_0)}\right)\cos 2\theta+\dfrac{v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{8\rho^2r_0^2}\left(-\dfrac{r^4}{r_0^4}+\dfrac{3r^2}{5r_0^2}+\dfrac{2J_2(\rho r)}{5J_2(\rho r_0)}\right)\cos 2\theta \\ \quad +\dfrac{v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{32\rho^2r_0^2}\left(-\dfrac{r^4}{r_0^4}+\dfrac{J_4(\rho r)}{J_4(\rho r_0)}\right)\cos 4\theta+\dfrac{v_{\mathrm{d4}}r_0^6}{360\rho r_0}\dfrac{J_6(\rho r)}{J_7(\rho r_0)}\cos 6\theta, \quad \text{for } r\leq r_0, \end{cases} \tag{36}$$

分散関係 $J_6(\rho r_0)=0$, $\quad r_0^2=-\frac{2v_{\mathrm{d2}}}{3v_{\mathrm{d4}}}$, となる．
2(vi[a2]M1) 外側解が変形 Bessel 関数で，遠方で指数的に減衰する場合 $(a_2(x)=0)$，M を 1 から順に求める．$M=1$, つまり，$v_{\mathrm{d}}(x)=v_{\mathrm{d1}}(=$定数$)$ の普通の HM 方程式では，解 $\psi-ux=$

$$\begin{cases} \dfrac{v_{\mathrm{d2}}}{4\kappa^2}+A_3+A_0K_0(\kappa r)+\left(A_1K_1(\kappa r)-\dfrac{u-v_{\mathrm{d1}}}{\kappa^2}r\right)\cos\theta, \quad \text{for } r\geq r_0, \\ \dfrac{v_{\mathrm{d2}}}{\rho^4}-\dfrac{u-v_{\mathrm{d2}}}{4\rho^2}r^2+\dfrac{\gamma}{\rho^2}+B_0J_0(\rho r_0)+\left(B_1J_1(\rho r)+\dfrac{u-v_{\mathrm{d1}}}{\rho r_0^2}r\right)\cos\theta, \quad \text{for } r\leq r_0, \end{cases} \tag{37}$$

$$A_0=\frac{\phi_c-A_3}{K_0(\kappa r_0)},\quad A_1=\frac{r_0(u-v_{\mathrm{d1}})}{\kappa^2K_1(\kappa r_0)},\quad B_0=\frac{\phi_c-\gamma/\rho^2}{J_0(\rho r_0)},\quad B_1=-\frac{r_0(u-v_{\mathrm{d1}})}{\rho^2J_1(\rho r_0)}, \tag{38}$$

分散関係 $\dfrac{K_2(\kappa r_0)}{\kappa r_0K_1(\kappa r_0)}=-\dfrac{J_2(\rho r_0)}{\rho r_0J_1(\rho r_0)}$, $\quad A_0\kappa r_0K_1(\kappa r_0)=B_0\rho r_0J_1(\rho r_0)$, となる．
2(vi[a2]M2) $M=2$, つまり，$v_{\mathrm{d}}(x)=v_{\mathrm{d2}}x+v_{\mathrm{d1}}$, $(v_{\mathrm{d2}}\neq 0)$, 線形 (軸反対称) な反磁性速度の場合．$u=v_{\mathrm{d1}}(=v_{\mathrm{E1}})$, で，解 $\psi-ux=$

$$\begin{cases} \dfrac{v_{\mathrm{d2}}}{4\kappa^2}+A_3+A_0K_0(\kappa r)+\left(A_2K_2(\kappa r)+\dfrac{v_{\mathrm{d2}}}{4\kappa^2}r^2\right)\cos 2\theta \quad \text{for } r\geq r_0, \\ \dfrac{v_{\mathrm{d2}}}{\rho^4}-\dfrac{u-v_{\mathrm{d2}}}{4\rho^2}r^2+\dfrac{\gamma}{\rho^2}+B_0J_0(\rho r_0)+\left(B_2J_2(\rho r)-\dfrac{v_{\mathrm{d2}}}{4\rho r_0^2}r^2\right)\cos\theta, \quad \text{for } r\leq r_0, \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} A_0&=\frac{\phi_c-A_3-v_{\mathrm{d2}}r_0^2/4\kappa^2}{K_0(\kappa r_0)}, & A_2&=-\frac{r_0^2v_{\mathrm{d2}}}{4\kappa^2K_2(\kappa r_0)}, \\ B_0&=\frac{\phi_c-\gamma/\rho^2-v_{\mathrm{d2}}/\rho^4+v_{\mathrm{d2}}r_0^2/4\rho^2}{J_0(\rho r_0)}, & B_2&=\frac{r_0^2v_{\mathrm{d2}}}{4\rho^2J_2(\rho r_0)}, \end{aligned} \tag{40}$$

分散関係 $\dfrac{K_3(\kappa r_0)}{\kappa r_0 K_2(\kappa r_0)}=-\dfrac{J_3(\rho r_0)}{\rho r_0 J_2(\rho r_0)}$, $A_0\kappa K_1(\kappa r_0)-B_0\rho J_1(\rho r_0)=\dfrac{v_{\rm d2}r_0}{2}\left(\dfrac{1}{\kappa^2}+\dfrac{1}{\rho^2}\right)$, となる．後者を満たす限り，円状に対称なポテンシャルを任意振幅で加えることができる．

2(vi[a2]M3) $M=3$ では，$v_{\rm d}(x)=v_{\rm d3}x^2+v_{\rm d1}$，$(v_{\rm d3}\neq 0)$, 反磁性速度が軸対称な形に限られる．解 $\psi-ux=$

$$
\begin{cases}
\phi_c+\left(\dfrac{2v_{\rm d3}r_0^5}{\kappa^4 r_0^4}-\dfrac{u-v_{\rm d1}}{\kappa^2 r_0^2}r_0^3\right)\left(\dfrac{r}{r_0}-\dfrac{K_1(\kappa r)}{K_1(\kappa r_0)}\right)\cos\theta+\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{4\kappa^2 r_0^2}\left(\dfrac{r^3}{r_0^3}-\dfrac{K_1(\kappa r)}{K_1(\kappa r_0)}\right)\cos\theta \\
\quad+\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{12\kappa^2 r_0^2}\left(\dfrac{r^3}{r_0^3}-\dfrac{K_3(\kappa r)}{K_3(\kappa r_0)}\right)\cos 3\theta, \quad \text{for } r\geq r_0, \\
\phi_c+\left(\dfrac{2v_{\rm d3}r_0^5}{\rho^4 r_0^4}+\dfrac{u-v_{\rm d1}}{\rho^2 r_0^2}r_0^3\right)\left(\dfrac{r}{r_0}-\dfrac{J_1(\rho r)}{J_1(\rho r_0)}\right)\cos\theta+\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{4\rho^2 r_0^2}\left(-\dfrac{r^3}{r_0^3}+\dfrac{J_1(\rho r)}{J_1(\rho r_0)}\right)\cos\theta \\
\quad+\dfrac{v_{\rm d3}r_0^5}{12\rho^2 r_0^2}\left(-\dfrac{r^3}{r_0^3}+\dfrac{J_3(\rho r)}{J_3(\rho r_0)}\right)\cos 3\theta, \quad \text{for } r\leq r_0,
\end{cases}
\tag{41}
$$

分散関係 $\dfrac{K_4(\kappa r_0)}{\kappa r_0 K_3(\kappa r_0)}=-\dfrac{J_4(\rho r_0)}{\rho r_0 J_3(\rho r_0)}$,

$$
\left(-\frac{2}{\kappa^2 r_0^2}+\frac{u-v_{\rm d1}}{v_{\rm d3}r_0^2}-\frac{1}{4}\right)\frac{K_2(\kappa r_0)}{\kappa r_0 K_1(\kappa r_0)}+\left(\frac{2}{\rho^2 r_0^2}+\frac{u-v_{\rm d1}}{v_{\rm d3}r_0^2}-\frac{1}{4}\right)\frac{J_2(\rho r_0)}{\rho r_0 J_1(\rho r_0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa^2 r_0^2}+\frac{1}{\rho^2 r_0^2}\right),
$$

になる．後者の分散関係は，渦の伝播速度 u と 円の半径 r_0 との関係を表わしている．

2(vi[a2]M4) $M=4$ では，$v_{\rm d}(x)=v_{\rm d4}x^3+\tilde{v}_{\rm d2}x+v_{\rm d1}$，$v_{\rm d4}\neq 0$, かつ $\tilde{v}_{\rm d2}$ が後の分散関係を満たすように制限を受ける．$u=v_{\rm d1}(=v_{\rm E1})$, で，解 $\psi-ux=$

$$
\begin{cases}
\phi_c+\dfrac{v_{\rm d4}r_0^6}{4\kappa^2 r_0^2}\left(\dfrac{6r^2}{\kappa^2 r_0^4}+\dfrac{3r^4}{8r_0^4}+\dfrac{\tilde{v}_{\rm d2}r^2}{v_{\rm d4}r_0^4}-\dfrac{6}{\kappa^2 r_0^2}-\dfrac{3}{8}-\dfrac{\tilde{v}_{\rm d2}}{v_{\rm d4}r_0^2}\right) \\
\quad+A_0(K_0(\kappa r)-K_0(\kappa r_0)) \\
\quad+\dfrac{v_{\rm d4}r_0^6}{4\kappa^2 r_0^2}\left(\dfrac{6r^2}{\kappa^2 r_0^4}+\dfrac{r^4}{2r_0^4}+\dfrac{\tilde{v}_{\rm d2}r^2}{v_{\rm d4}r_0^4}-\left(\dfrac{6}{\kappa^2 r_0^2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\tilde{v}_{\rm d2}}{v_{\rm d4}r_0^2}\right)\dfrac{K_2(\kappa r)}{K_2(\kappa r_0)}\right)\cos 2\theta \\
\quad+\dfrac{v_{\rm d4}r_0^6}{32\kappa^2 r_0^2}\left(\dfrac{r^4}{r_0^4}-\dfrac{K_4(\kappa r)}{K_4(\kappa r_0)}\right)\cos 4\theta, \quad \text{for } r\geq r_0, \\
\phi_c+\dfrac{v_{\rm d4}r_0^6}{4\rho^2 r_0^2}\left(\dfrac{6r^2}{\rho^2 r_0^4}-\dfrac{3r^4}{8r_0^4}-\dfrac{\tilde{v}_{\rm d2}r^2}{v_{\rm d4}r_0^4}-\dfrac{6}{\rho^2 r_0^2}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{\tilde{v}_{\rm d2}}{v_{\rm d4}r_0^2}\right) \\
\quad+B_0(J_0(\rho r)-J_0(\rho r_0)) \\
+\dfrac{v_{\rm d4}r_0^6}{4\rho^2 r_0^2}\left(\dfrac{6r^2}{\rho^2 r_0^4}-\dfrac{r^4}{2r_0^4}-\dfrac{\tilde{v}_{\rm d2}r^2}{v_{\rm d4}r_0^4}-\left(\dfrac{6}{\rho^2 r_0^2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\tilde{v}_{\rm d2}}{v_{\rm d4}r_0^2}\right)\dfrac{J_2(\rho r)}{J_2(\rho r_0)}\right)\cos 2\theta \\
\quad+\dfrac{v_{\rm d4}r_0^6}{32\rho^2 r_0^2}\left(-\dfrac{r^4}{r_0^4}+\dfrac{J_4(\rho r)}{J_4(\rho r_0)}\right)\cos 4\theta, \quad \text{for } r\leq r_0,
\end{cases}
\tag{42}
$$

分散関係 $\dfrac{K_5(\kappa r_0)}{\kappa r_0 K_4(\kappa r_0)}=-\dfrac{J_5(\rho r_0)}{\rho r_0 J_4(\rho r_0)}$,

$$
-\left(\frac{6}{\kappa^2 r_0^2}+\frac{1}{2}+\frac{\tilde{v}_{\rm d2}}{v_{\rm d4}r_0^2}\right)\frac{K_3(\kappa r_0)}{\kappa r_0 K_2(\kappa r_0)}+\left(\frac{6}{\rho^2 r_0^2}-\frac{1}{2}-\frac{\tilde{v}_{\rm d2}}{v_{\rm d4}r_0^2}\right)\frac{J_3(\rho r_0)}{\rho r_0 J_2(\rho r_0)}=\frac{1}{\kappa^2 r_0^2}+\frac{1}{\rho^2 r_0^2},
$$

$$
A_0\kappa r_0 K_1(\kappa r_0)-B_0\rho r_0 J_1(\rho r_0)=\frac{v_{\rm d4}r_0^6}{2}\left(\frac{1}{\kappa^2 r_0^2}+\frac{1}{\rho^2 r_0^2}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{\tilde{v}_{\rm d2}}{v_{\rm d4}r_0^2}+6\left(\frac{1}{\kappa^2 r_0^2}-\frac{1}{\rho^2 r_0^2}\right)\right),
$$
となる．

２番目の関係は，$\tilde{v}_{\rm d2}$ や $v_{\rm d4}$ を制限すいるか，適当な値の $\tilde{v}_{\rm d2}$ や $v_{\rm d4}$ に対し円の半径 r_0 を決めるとみなす．３番目は円上に対称な振幅 A_0 と B_0 との関係を表わす．

以上，区分的連続解を概略として整理すると，$M=1$–4, の各々の場合に，定常伝播する座標系で，反磁性速度は軸対称・反対称に限られ，それに応じて速度が軸対称・反対称になるシア流中に，軸反対称・対称の局在渦ポテンシャルの解が存在すると言える．

$M \geq 5$ では，今考えている解の存在は今後の課題である．

2(vi[a3]) $a_3(x)=0$ の場合を考える．線形項の係数が定数の場合は円状に対称で，

$$\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}r^2+(1/r)(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r)=4\varphi-6\gamma\varphi^2, \tag{43}$$

数値的に $\gamma=1.5946$ の時に，$\varphi'(0)=0, \varphi(\infty)=0$ になる単調に減衰する単極型(モノポール)渦解が分かっている [18]．また，線形項の係数の変化が緩い場合には，

$$\nabla^2\varphi=(\mathrm{e}^{-xK_\mathrm{T}}+|K_\mathrm{n}|/u-\theta^2/u^2)\varphi-(\theta^2/u^2)(\theta^2/u^2+|K_\mathrm{n}|/2u)\varphi^2,$$

が $K_\mathrm{T}=0$, 0.01, 0.1, (他の定数 $K_\mathrm{n}=0.12$, $\theta=0.1$, $u=0.212$,) の場合に滑らかな 2 次元数値解が得られており [19]，他の数値計算 [9] や近似法 (WKB 法 [8, 9]，擬 1 次元近似 [20]) でも滑らかな単極解が得られている．それで，次の条件を満たす場合には，全平面で有限で，遠方で指数的に減衰する解が期待できる．条件 $c_1\phi_0(x)+c_2>0$, (for all x), では，遠方で減衰する場合に，$\nabla^2\varphi \simeq (c_1\phi_0(x)+c_2)\varphi$, と近似できるので，指数的に減衰する．さらに条件 $c_1<0$, かつ $c_1\phi_0(x=0)+c_2+\frac{c_1}{2}\varphi(r=0)>0$, を満たすと，原点で $\nabla^2\varphi<0$, となり，有限で，かつ $(\partial\varphi/\partial r)|_{r=0}=0$, となる単調減少解が期待できる．

$M=4$ では，$v_\mathrm{d}(x)=v_\mathrm{d4}x^3+v_\mathrm{d3}x^2+v_\mathrm{d2}x+v_\mathrm{d1}$, $v_\mathrm{d4}<0$, $3v_\mathrm{d2}v_\mathrm{d4}>v_\mathrm{d3}$, の場合に，シア流部の方程式の解

$$\phi_0(x)=\frac{v_\mathrm{E2}}{2}(x-x_0)^2,\ \ v_\mathrm{E2}<0,\ \ x_0=-\frac{v_\mathrm{d3}}{3v_\mathrm{d4}}, \tag{44}$$

$$c_1=\frac{2v_\mathrm{d4}}{v_\mathrm{E2}^2}<0,\ \ c_2=\frac{v_\mathrm{d2}-3v_\mathrm{d4}x_0^2}{v_\mathrm{E2}},\ \ u=v_\mathrm{d4}x_0^3+v_\mathrm{d3}x_0^2+v_\mathrm{d2}x_0+v_\mathrm{d1},$$

は，条件を満たす．また，特別な形 $v_\mathrm{d}(x)=v_\mathrm{d1}+v_\mathrm{dc}\mathrm{sech}\kappa x\tanh\kappa x$, $v_\mathrm{dc}<-\kappa^2$ の場合に，シア流$\phi_0(x)=v_\mathrm{E2}\mathrm{sech}^2\kappa x$, $v_\mathrm{E2}>0$, $c_1=-12\kappa^2/v_\mathrm{E2}$, $c_2=4\kappa^2(1+3v_\mathrm{E0}/v_\mathrm{E2})$, $u=v_\mathrm{d1}$, は，条件を満たす．これらの場合に，全平面で有限で，中心から単調に減少し，遠方では指数的に減衰する単極型渦解が期待できる．

3. おわりに——構成方法の簡単なまとめ

1. 解の構成方法 I. 双極型孤立渦
   (i) 無限遠での境界条件 (Fの決定)．
   (ii) 変形 Bessel 関数の指数的減衰解 (外側解)．
   (iii) 原点 $r=0$ で有限．境界円内で内側解 (振動型になる線形関数 Fを選択)．
   (iv) 接続条件で，外側解と内側解とを接合．
2. 解の構成方法 II. シア流を伴う局在渦
   (i) 無限遠での境界条件 (G がシア流に依存)．
   (ii) 局在渦方程式をシア流の回りで展開．
   (iii) 特異点除去条件．係数 $a_k(x)=0$．
   シア流の常微分方程式と局在渦の方程式 [a1]$a_1(x)=0$, [a2]$a_2(x)=0$, [a3] $a_3(x)=0$．

(iv) [a1] べき的減衰解，[a2] 変形 Bessel 関数の指数的減衰解，(外側解)．
(v) [a1][a2] 原点 $r = 0$ で有限．境界円内で内側解 (振動型になる線形関数 G を選択)．
(vi) [a1]M1–M4 [a2]M1–M4 接続条件で，外側解と内側解とを接合．
[a3] 全領域で滑らかかつ有限な局在渦の方程式．

参考文献

[1] H.Moriguchi and K.Nozaki, J. Phys. Soc. Jpn., **61**(1992)107.

[2] A.Hasegawa and K.Mima, Phys. Rev. Lett., **39**(1977)205.

[3] A.Hasegawa and K.Mima, Phys. Fluids, **21**(1978)87.

[4] J.G.Charney, Geophys. Public. Kosjones Nors. Videnshap. Akad. Oslo, **17**(1948)3.

[5] A.Hasegawa, C.G.Maclennan, and Y.Kodama, Phys. Fluids, **22**(1979)2122.

[6] G.K.Morikawa, J. Meteorol., **17**(1960)148.

[7] J.Nycander and M.B.Isichenko, Phys. Fluids B, **2**(1990)2042.

[8] V.I.Petviashvili, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz., **32**(1980)632 [JETP Lett. **32**(1980)619].

[9] V.I.Petviashvili, Pis'ma Astron. Zh., **9**(1983)253 [Sov. Astron. Lett. **9**(1983)137].

[10] M.V.Nezlin, Usp. Fiz. Nauk, **150**(1986)3 [Sov. Phys. Usp. **29**(1986)807].

[11] V.D.Larichev and R.M.Reznik, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **231**(1976)1077 [in Rossian].

[12] J.D.Meiss and W.Horton, Phys. Fluids, **26**(1983)990.

[13] M.Makino, T.Kamimura, and T.Taniuti, J. Phys. Soc. Jpn., **50**(1981)980.

[14] J.C.McWilliams and N.J.Zabusky, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., **19**(1982)207.

[15] G.R.Flierl, V.D.Larichev, J.C.McWilliams, and G.M.Reznik, Dyn. Atoms. Oceans, **5**(1980)1.

[16] R.Z.Sagdeev, V.D.Shapiro and V.I.Shevchenko, Pis'ma Astron. Zh., **7**(1981)505 [Sov. Astron. Lett. **7**(1981)279].

[17] S.Horihata, H.Irie, and M.Sato, J. Phys. Soc. Jpn., **59**(1990)1242.

[18] X.Su, W.Horton, P.J.Morrison and V.P.Pavlenko, Report IFSR No.328, Univ. of Texas at Austin(1988).

[19] S.Rath and P.K.Kaw, Phys. Lett. A, **158**(1991)139.

[20] V.P.Lakhin, A.B.Mikhailovskii and O.G.Onishchenko, Phys. Lett. A, **119**(1987)348.